스톡홀름 시내에서 포즈를 취한 한국대표단

스웨덴 국제수학올림피아드를 다녀와서

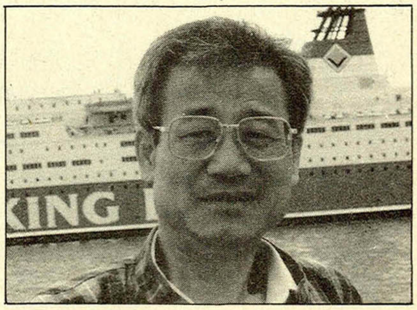
비교적 좋은 성적을 거뒀으나…

제 32회 국제수학올림피아드(IMO)에
한국의 수학두뇌들을 이끌고 참가한 대표단
단장의 참관기

김성기
서울대 수학과 교수

수학에 재능이 있는 학생을 조기에 발굴해 격려하고, 저변 확대를 통한 수학발전을 꾀하기 위해 시작된 IMO(International Mathematical Olympiad)가 스웨덴에서 올해로 32회를 맞았다. 대회기간중 각국의 수학교육방법 및 영재교육에 대한 정보를 교환했을 뿐아니라 앞으로의 교육방향에 대한 의견을 나눴다.

필자



참가학생들은 합숙기간중 흥미있는 놀이를 통해 세계의 친구들을 사귀고, 주최국에서 제공하는 관광을 함으로써 많은 것을 배울 수 있었다. 아마도 참가학생들은 교육적으로도 얻은 것이 많았을 것으로 생각된다.

55개국중 17위

한국의 참가는 이번이 네번째다. 제29회

(호주)대회 때 처음으로 출전해 49국중 22위(동상 3명)를 했고, 제30회(독일)대회 때는 참가 50국중 28위(은상 1명)를 했고, 제31회(중국)대회 때는 참가 52국중 32위(은상 1명, 동상 1명)를 차지했다. 이번 제32회(스웨덴)대회에서는 참가 55국중 17위(은상 1명, 동상 4명)로 비교적 좋은 성적을 거뒀다.

이 결과는 대표학생들의 노력 외에 한국과학재단의 적극적인 도움과 국민적인 관심이 밑받침이 되었다. 또 IMO에 관심있는 학생들의 수가 급격히 많아져 선발과정의 경쟁이 치열해진 것도 비교적 좋은 성적을 낸 배경이다. 아울러 4회째 참가하는 동안 경험과 자료가 축적됐고 통신강좌 주말강좌 동계강좌에 희생적으로 참여한 교수들의 노고의 덕이라 할 수 있다.

참가학생들은 7월 13일까지 각자의 고등학교에서 기말시험을 본 뒤 바로 다음날 김포를 출발, 모두 극도로 지쳐 있었으나 여러가지 어려운 상황 아래서도 최선을 다해 우리의 참 실력을 보여 주었다.

IMO의 한 문항당 배점은 7점인데 모두 여섯문제(개인별 만점 42점)가 주어진다. 일반적으로 대표학생 여섯명의 점수를 합해 국가별(만점 2백52점) 순위를 정하는데 이번 대회의 20위까지의 국가별 순위와 점수는 (표1)과 같다.

이번 스웨덴대회에 참가한 학생 3백6명중 42점 만점을 받은 학생은 9명(소련 4명, 중국 헝가리 루마니아 프랑스 영국 각 1명)이었다. 이중 소련의 한 여학생(Evgeniga

(표 1) 국가별 성적(총점 2백52점)

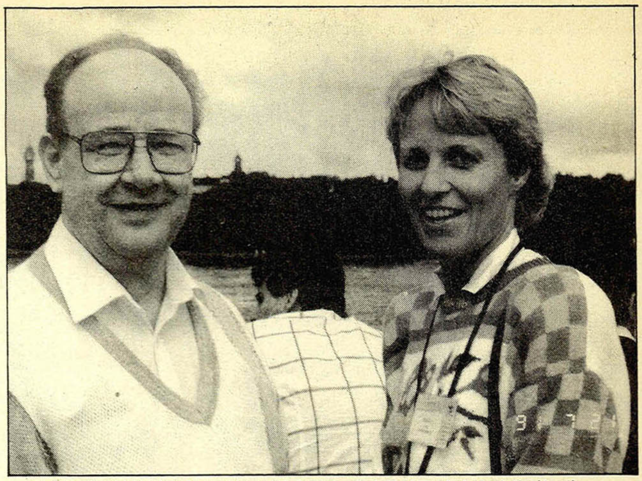
순위	국가	점수	비고
1	소련	241	
2	중국	231	
3	루마니아	225	
4	독일	222	
5	미국	212	
6	헝가리	209	
7	불가리아	192	
8	이란	191	
9	베트남	191	
10	인도	187	
11	체코슬로바키아	186	
12	일본	180	
13	프랑스	175	
14	캐나다	164	
15	폴란드	161	
16	유고슬라비아	160	
17	한국	141	
18	오스트리아	142	
18	영국	142	
20	오스트레일리아	129	

(표 2) 점수별 인원수(42점 만점)

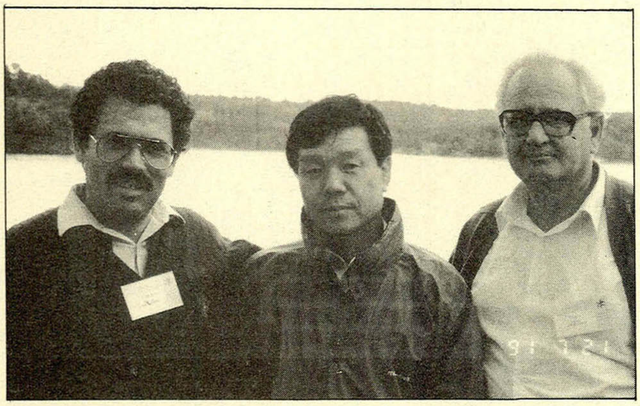
점수	명수	비 고	점수	명수	비 고
42	9	금 상	20	8	동상(한국 1명 포함)
41	4	〃	19	4	〃
40	4	〃	18	6	
39	3	〃	17	8	
38	13	은상(한국 1명 포함)	16	5	
37	5	〃	15	11	
36	8	〃	14	8	한국 1명 명예상 포함
35	7	〃	13	8	
34	4	〃	12	8	
33	3	〃	11	9	
32	6	〃	10	7	
31	5	〃	9	12	
30	10	동 상	8	7	
29	5	〃	7	8	
28	3	〃	6	6	
27	6	〃	5	9	
26	9	〃(한국 2명 포함)	4	11	
25	3	〃	3	10	
24	9	〃(한국 2명 포함)	2	8	
23	9	〃	1	8	
22	7	〃	0	8	
21	11	〃	계	306	

IMO에 관심있는 학생들의 수가 급격히 많아져 선발과정의 경쟁이 치열해진 것도 좋은 성적을 올린 배경

▲이탈리아팀 부단장과 함께. 각국의 대표들은 대회기간중 수학학습방법과 관련된 많은 정보를 나눌 수 있었다.



▲IMO조직위원회 사무총장 부부. 사무총장은 매년 주최국 사람이 맡게 되는데 이번에는 스웨덴 괴테베르그대학 수학과 사무엘슨 교수가 대회를 진행시켰다.



◀가운데 있는 사람이 한국대표단 부단장 서울대 수학교육과 조승제교수. 그는 겨울학교 강좌와 주말강좌를 주관했다.

Malinnikova)은 작년 북경대회에 이어 2년 연속 만점을 받아 주목을 끌었다. 하지만 그 여학생은 내년에 대학진학을 하기 때문에 33회 대회에는 참가하지 못한다고 한다.

39점 이상을 받은 학생에게 금상이 주어지는데 우리나라 최병희군(서울과학고 3년)은 38점으로 1점이 모자라 아깝게 은상에 머무르고 말았다. 각 점수별 인원수는 (표2)와 같다.

헝가리에서는 TV 인기프로로 자리잡아

IMO에 참가하는 세계 각국의 선발훈련제도는 각기 다르지만 자유진영 국가에서는 민간단체가 국가나 기업의 도움을 받아 대비하는 것이 일반적이다. 반면 사회주의 국가에서는 국가가 관리하는 것이 특징이라 할 수 있다. 사회주의 국가(소련 중국 루마니아 등)에서는 수학영재를 일찍 발굴해 적극적으로 영재교육을 시키고 있다. 일단 대표로 선발되면 자신이 원하는 대학에 진학할 수 있기 때문에 선발 이후에는 IMO대비 교육에만 전념할 수 있다.

스웨덴대회 기간중에 만난 헝가리 대표(Josef Polikan 박사)는 자신이 학생 때부터 참석, 올해로 28번째 참가기록을 세우고 있었다. 그는 헝가리에서는 1894년부터 전국적인 수학경시대회가 실시되고 있다고 들려 주었다. 수학에 관한 국민의 관심이 지대해 TV프로에서도 수학문제가 해설되고 있다고 한다.

미국은 각 고등학교에서 선발된 학생들에게 미국 고등학교 수학시험(객관식 30문항, 90분) 문제를 풀게함으로써 1차로 걸러내고 있다. 이 시험에서 1백점 이상(1백50점 만점)을 받은 학생만 1차 관문을 통과시키는 것이다. 이들은 다시 미국 초청시험(단답형 15문항, 3시간)을 거친 뒤 미국수학올림피아드(주관식 5문항, 3시간 반)에서 최종선발된다. 이렇게 선발된 대표학생들은 해군사관학교에서 3주간 특수훈련을 받은 다음 IMO에 출전한다고 한다.

IMO 시험문제는 대회에 참가한 각국에서 제출한 문제중에서 뽑게 되는데 문제로 채택되는 과정은 다음과 같다. 먼저 주최국(스웨덴) 위원회에서 1차로 30문항을 뽑은 뒤 참가국 대표 55명으로 구성된 선정회의에서 면밀히 검토한다(7월 12일~14일까지 3일간). 7월 14일. 여러 번의 찬반투표를 거쳐 최종 6문항이 확정됐다. 그날 저녁 선정된 문제의 배열을 결정한 뒤 5개 공식어(영어 불어 독어 스페인어 소련어)로 출제문안을 작성했다. 그밖의 언어 사용국가는 그 다음날 각기 자기나라 언어로 문안을 바꿨다. 곧 이어서 열린 참가국 대표회의에서 37개의 언어로 번역된 시험문제를 승인했다.

우리 학생들은 14일 저녁에야 스웨덴에 도착했다. 그 이튿날에는 관광을 하고 16일 저녁엔 개회식에 참가했다. 그들은 17, 18 양일간에 시험을 치렀다. 시험기간중 각국 대표들이 학생들의 질문에 응할 수 있었으나 질문에 답하려면 대표자회의에 질문사항을 설명하고 답변문구까지 허락을 받아야 했다(예를 들어 질문에 답할 필요가 없다, 문제를 잘 읽어볼 것 등등).

시험후 각국 대표들이 주최국 채점위원들과 함께 각 문항 최종점수를 확정하는 동안

학생들은 관광을 즐기며 친분을 도모했다. 20일 저녁에는 각국 대표자 및 주최국 채점자 합동회의에서 금 은 동상의 커트라인이 결정됐다. 21일에는 참가자 전원이 스톡홀름 시내 및 4시간 반 동안의 해상여행을 즐겼다. 22일에 열린 폐회식 때는 메달수여식과 만찬축하공연이 있었다.

우리팀은 그 다음날 아침 스톡홀름을 출발했다.

미·적분은 출제되지 않아

IMO의 출제범위는 우리의 교과과정과 다소 다르다. 예를 들어 우리의 고교수학과정 중 중요한 비중을 차지하는 미적분과 통계는 출제범위에 들어가지 않는다. 그 대신 우리의 고교수학과정에 없는 논증기하 정수론 그래프이론에 관한 문제가 출제된다. 이번 대회에 출제된 문항은 ①기하학 ②정수론 ③정수론과 집합론 ④그래프이론 ⑤기하학 ⑥해석학(수열)과 관련된 문제들이었다. 우리 학생들의 총점을 문항별로 보면 ①39점 ②34점 ③12점 ④28점 ⑤24점 ⑥14점을 받았다. ③번과 ⑥번 문제가 우리 학생들에게는 가장 어려운 문항이었던 것이다.

반면 ①번 문제는 우리 학생들이 거의 만점에 가깝게 푼 문제이고 ②번 문제도 정답률이 높았다. 수학에 흥미가 있는 독자라면 시간을 내서라도 이 두 문제만은 직접 해결해 보기 바란다. 그 두 문제를 다 푼 독자는 필자의 풀이를 봐도 괜찮다.

끈기있게 파고들어야

육체적인 올림픽과는 달리 IMO는 단기간의 훈련과 스파르타식 교육으로 좋은 결과를 기대할 수 없다. 좋은 성적을 내려면 꾸준히 자기의 재능을 개발하고 논리적으로 문제를 해결하는 능력을 키워야 한다. 객관식 문제에만 익숙한 학생은 주관식 문제(특히 IMO 문제)에 접근하기조차 어렵지만, 주관식 문제에 익숙한 학생은 객관식 문제를 쉽게 해결한다. 대학에 진학한 후에도 주관식 훈련을 거친 학생이 전공을 쉽게 이해한다.

IMO에서는(한국수학경시대회 때도 마찬가지) 한 문제를 한시간 반에 걸쳐 해결하도록 충분한 시간을 준다. 일반적으로 어려운

사회주의국가에서는
대표로 선발된 학생들에게
자신이 원하는 대학에
진학할 수 있는 길을
열어줌으로써…

대회에 참가한 임원 학생들은 함께 관광을 하면서 친선을 도모했다.

제32회 IMO 출제문제

첫째날

1. ΔABC의 꼭지점, A, B, C에서의 내각의 이등분선이 대변과 만나는 점을 각각 A', B', C'라 하자. ΔABC의 내접원의 중심을 I라 할 때,

$$\frac{1}{4}<\frac{\overline{AI}\cdot\overline{BI}\cdot\overline{CI}}{\overline{AA'}\cdot\overline{BB'}\cdot\overline{CC'}}\leqq\frac{8}{27}$$

임을 보여라.

2. $n>6$인 자연수 n에 대해 n보다 작으면서 n과 서로소인 자연수들을 모두 모아 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_k$라 하자. 이때

$$a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots=a_k-a_{k-1}>0$$

이면, n은 소수이거나 2의 자연수 승임을 보여라.

3. 집합 $S=\{1,2,3, \cdots, 280\}$의 n개의 원소를 갖는 임의의 부분집합이 서로소(두개씩)인 원소를 적어도 5개 포함하도록 하는 최소의 자연수 n을 구하라.

제한시간 : 4.5시간
문항당 7점

둘째날

4. κ개의 변을 가지는 연결된 그래프 G의 각 변에 $1,2,3, \cdots, \kappa$의 번호를 모두 붙여가되, 두개 이상의 변에 속하는 G의 정점에서는 항상 이 정점이 속한 변들에 붙여진 번호들의 공약수가 1을 넘지 않도록 붙일 수 있음을 보여라.

그래프는 정점이라고 불리는 점들과 서로 다른 두 정점을 잇는 변들로 이뤄진다. 주어진 두 정점 υ, ν를 잇는 변은 많아야 하나가 있으며, 그 경우 이 변을 $\upsilon\nu$ 또는 $\nu\upsilon$로 나타낸다. 그래프 G가 연결됐다 함은 G의 임의의 두 정점 x,y에 대해 정점 $x=\nu_0, \nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_m=y$가 G에 존재, $\nu_0\nu_1, \nu_1\nu_2, \cdots, \nu_{m-1}\nu_m$이 모두 그래프 G의 변인 경우다.

5. ΔABC의 내부에 있는 점 P에 대해 ΔPAB, ΔPBC, ΔPCA중 적어도 하나는 30°를 넘지 않음을 보여라.

6. 실수로 이루어진 무한수열 $x_0, x_1, x_2, \cdots$이 있다. 모든 $i=0,1,2, \cdots$에 대해

$$|x_i|\leqq C$$

인 상수 C가 존재하면 이 무한수열을 유계라고 한다.
$a>1$인 상수 a가 주어졌을 때, $i\neq j$인 모든 $i, j=0,1,2, \cdots$에 대해

$$|x_i-x_j|\,|i-j|^a\geqq 1$$

을 만족시키는 유계인 무한수열 $x_0, x_1, x_2, \cdots$의 예를 만들어라.

제한시간 : 4.5시간
문항당 7점

공식을 필요로 하지 않는 문제를 출제하는데 이런 문제를 풀려면 깊이 생각하고, 논리적으로 꾸준히 체계화한 뒤 끈기있게 파고드는 습관이 무엇보다 필요하다. 다시 말해 대학 진학만을 위한 공부보다 진학후의 더 심오한 공부를 위한 준비를 겸하는 자세가 요구된다. 솔직히 말해 대학입시 문제로 제시되는 수학문제는 교과서만을 보고 출제한다. 교과서의 내용을 얼마나 이해하고 응용할 수 있나, 사고력이 어느 정도인가를 시험하는 것이다. 따라서 교과서 이면에 있는 뜻을 알 때까지 교과서를 깊이 파고 들어야 한다.

그런데 대부분의 학생은 문제집 위주의 단편적 공부로 높은 점수를 따려고 하는데 이는 극히 위험한 수학공부방법일 뿐아니라 시험종료와 동시에 잊어버리는 순간만을 위한 공부다. 학력고사에서 조금 새로운 형태의 문제가 나오면 어렵다고 야단들이다. 한 문제를 며칠 걸려서라도 해결하면 기쁨을 맛볼 수 있고 참 지식이 되지만, 답을 보고 읽어가는 공부는 노는 것만 못하다.

아무쪼록 스스로 길러서, 스스로 요리하고, 스스로 소화하는 공부를 할 것을 부탁한다. 특히 시간 여유가 있는 저학년 학생들에게는 이런 식의 공부를 요구하고 싶다. IMO에 도전하지 않는 학생들도 모두 필자의 요구대로 수학공부를 습관화하면 수학에 대한 두려움은 커녕 오히려 너무 쉬운 문제만 출제한다는 불평이 터져 나올 것이다.★

먼저 ①번 문제를 풀어보자.

$\angle BAA'=\angle CAA'$이므로
$\overline{BC'}:\overline{A'C}=\overline{AB}:\overline{AC}=c:b$
$\overline{BC}=\overline{BA'}+\overline{A'C}$이므로
$a-\overline{A'C}:\overline{A'C}=c:b$

$$\therefore \overline{A'C}=\frac{ab}{c+b}$$

$$\overline{AI}:\overline{IA'}=\overline{AC}:\overline{A'C}=b:\frac{ab}{c+b}$$

따라서 $\dfrac{\overline{AI}}{\overline{AA'}}=\dfrac{\overline{AI}}{\overline{AI}+\overline{IA'}}=$

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{AI}+(1+\dfrac{a}{c+b})}=\frac{b+c}{a+b+c}$$

마찬가지로 $\dfrac{\overline{BI}}{\overline{BB'}}=\dfrac{a+c}{a+b+c}$

$\dfrac{\overline{CI}}{\overline{CC'}}=\dfrac{a+b}{a+b+c}$를 얻는다.

$$\frac{\overline{AI}\cdot\overline{BI}\cdot\overline{CI}}{\overline{AA'}\cdot\overline{BB'}\cdot\overline{CC'}}=\frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{(a+b+c)^3}$$

$$\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{(a+b+c)^3}}\leqq\frac{1}{3}\Big(\frac{b+c}{a+b+c}+\frac{a+c}{a+b+c}+\frac{a+b}{a+b+c}\Big)=\frac{2}{3}$$

$$\therefore\frac{\overline{AI}\cdot\overline{BI}\cdot\overline{CI}}{\overline{AA'}\cdot\overline{BB'}\cdot\overline{CC'}}\leqq\frac{4}{27}$$

한편 x,y를 양수라 할 때 $x+y=x_1+y_1$이고 $|x-y|<|x_1+y_1|$이면 $xy>x_1y_1$이므로 $x^3+y^3-(x+y)(x^2-xy+y^2)<(x_1+y_1)(x_1^2-x_1y_1+y_1^2)=x_1^3+y_1^3$이고 $3(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$
이므로 $a\geqq b\geqq c$라 하면

$$\frac{a+b+c}{2}-\frac{a+b+c}{2}=c>|a-b|$$

$$\frac{a+b+c}{2}>\Big|\frac{a+b-c}{2}-c\Big|$$

$\dfrac{a+b+c}{2}>\Big|\dfrac{a+b+c}{2}-c\Big|$로부터

$$\frac{\overline{AI}\cdot\overline{BI}\cdot\overline{CI}}{\overline{AA'}\cdot\overline{BB'}\cdot\overline{CC'}}=$$

$$\frac{(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3}{3(a+b+c)^3}>$$

$$\frac{(a+b+c)^3-(\frac{a+b+c}{2})^3-(\frac{a+b-c}{2})^3-c^3}{3(a+b+c)^3}$$

$$>\frac{(a+b+c)^3-(\frac{a+b+c}{2})^3-(\frac{a+b+c}{2})^3-0^3}{3(a+b+c)^3}$$

$$=\frac{1}{4}$$

②번 문제의 풀이는 다음과 같다.

p가 n과 서로 소인 최소의 소수일 때 $a_1=1, a_2=p$임을 알 수 있다. 또한 $a_k=n-1$, 공차 $r=p-1$임을 알 수 있다.
이때 n이 홀수이면 $a_2=2$, $r-1$이므로 수열은 1,2, …, $n-1$이고 $g<n$이면 $(g,n)-1$이어야 하므로 n은 소수이여야 한다.
그러나 n이 짝수이면 $p\geqq3$임을 알 수 있다.

우선 $p=3$이면 $r=2$이고 수열은 1,3,5, …, $n-1$이므로 $g<n$ 모든 홀수 g가 $(g,n)=1$이어야 하므로 $n=2^m$꼴이다.

한편 $p>3$이면 $3\mid n$이고 $a_k=a_1+r(k-1)$이므로 $n-1=1+(p-1)(k-1)$에서 $(p-1)\mid(n-2)$*임을 알 수 있다.
$q\mid p-1$인 소수 q에 대해 ＊로 부터 $q\mid(n-2)$이고 $q<p$이므로 $q\mid n$이다. 짝수 n에 대해 $q\mid(n-2)$이고 $q\mid n$이므로 $q=2$이다. $p-1$의 모든 소인수는 2이므로 $p-1=2^j$꼴, 즉 $p=2^j+1$, $j\geqq2$이다.
p는 소수이므로 $j=2^t$꼴이 되어야 하므로 $p=2^{2^t}+1, t\geqq1$이다.
$a_3=a_1+2r=1+2(p-1)=2p-1=2^{2^t+1}+1$은 3의 배수이므로 $3\mid a_3$와 $3\mid n$은 $(a_3, n)=1$에 모순이므로 $p>3$일 수 없다.
따라서 n은 소수이거나 2의 거듭제곱이다.

문제집 위주의 단편적 공부로 높은 점수를 따려고 하는데 이는 순간만을 위한 공부일 뿐이다.

한국대표단은 채점기간 동안 스웨덴 관광을 즐겼다.