논·구술 완벽가이드

수 학

최대 · 최소 정리와 중간값 정리

다항식은 다양하게 활용된다.

중간값 정리의 다양한 쓰임을 파악한다.

연속함수는 폐구간에서 항상 최댓값과 최솟값을 갖는다.

Q1

다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

(가) 연속인 함수는 폐구간에서 다음의 성질을 만족하는데, 이를 최대 · 최소 정리라 한다.

함수 $f(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이면 $f(x)$는 $[a, b]$에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

(나) 중간값 정리의 내용은 다음과 같다.

함수 $f(x)$가 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$일 때, $f(a)$와 $f(b)$사이에 있는 임의의 실수 값 l에 대해 $f(c)=l$을 만족하는 c가 $[a, b]$에 적어도 하나 존재한다.

이를 다음과 같이 정리해 표현할 수 있다.

폐구간 $[a, b]$에서 정의된 연속함수 $f:[a, b]\to R$에 대해 다음 사실이 성립한다.

- $f(a)f(b)<0$이면, $f(c)=0$을 만족하는 점 c가 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.
- $f(a)\leq l\leq f(b)$ 또는 $f(b)\leq l\leq f(a)$이면, $f(c)=l$을 만족하는 점 c가 $[a, b]$에 적어도 하나 존재한다.

(다) m차 다항식 $P(x)=a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$가 $a_m>0$이고 m개의 서로 다른 실근을 갖는다. 또한 $2m$차 다항식 $Q(x)$는 $P(x)$를 이용해 다음과 같이 표현한다.

$$Q(x)=(P(x))^2-P'(x)$$

1–1) 연속함수 $f:R\to R$가 임의의 실수 x에 대해 $f(f(x))=x$를 만족할 때, $f(x_0)=x_0$인 점 $x_0\in R$가 존재함을 증명하라.

1–2) 두 연속함수 $f:[0, 1]\to[0, 1]$과 $g:[0, 1]\to[0, 1]$이 $f(g(x))=g(f(x))$를 만족할 때, $f(x)$와 $g(x)$가 한 개 이상의 점에서 만나게 됨을 증명하라.

2–1) m이 홀수이면 $Q(x)$가 m+1개 이상의 실근을 갖고, m이 짝수이면 $Q(x)$가 m개 이상의 실근을 가지게 됨을 증명하라.

2–2) $(P'(x))^2>P(x)P''(x)$를 증명하라.

2–3) $P(x)Q'(x)>2P'(x)Q(x)$를 증명하라.

2–4) m이 홀수이면 $Q(x)$가 정확히 m+1개의 서로 다른 실근을 갖고, m이 짝수이면 $Q(x)$가 정확히 m개의 서로 다른 실근을 갖는다. 이를 증명하라.

글 **윤종선** · KuMing@pathfinder.or.kr

서울대 수학과를 졸업하고 대치유레카와 코기토학원에서 심층면접과 수리논술을 강의하고 있다. 단순한 계산문제로는 느낄 수 없는 수학의 재미를 학생들에게 전달하기 위해 재미있으면서도 도전할만한 논구술문제 개발을 목표로 노력중이다.

전문가 클리닉 최근 대학들의 수리논술문제가 아주 짧은 제시문에 문제풀이에 필요한 정보만 있는 형태로 출제되고 있습니다. 제시문에 대한 분석능력이나 독해능력보다는 문제 해결능력에 초점을 맞추고 있다고 볼 수 있습니다.

1-1) 일반적으로 방정식의 해가 존재함을 증명하거나 그래프의 교점이 존재함을 증명하는 문제는 중간값 정리를 사용하는 경우가 많습니다. 이 문제는 $f(a)>a$이고 $f(b)<b$인 두 점 a, b를 찾아낸 후, 중간값 정리를 이용해 증명합니다.

1-2) $f(x)$와 $g(x)$가 만나지 않는다면 중간값 정리에 의해 $f(x)-g(x)$의 부호가 일정해야 합니다. f와 g를 합성할수록 f와 g의 차이가 더 커진다는 성질을 이용해 문제를 풉니다. 즉, f와 g의 공역이 $[0,\ 1]$이므로 $f^k(x)-g^k(x)>f^{k-1}(x)-g^{k-1}(x)$를 이용해 $f^k(x)-g^k(x)$가 1 이상이 되는 것을 증명하면 모순이 발생합니다. 이 때, f와 g를 합성하는 과정에서 $f(g(x))=g(f(x))\Rightarrow f(f(g(x)))=f(g(f(x)))=g(f(f(x)))$와 같이 f와 g의 위치를 마음대로 바꿀 수 있습니다.

2-1) 근의 개수를 결정하는 문제이므로 중간값 정리를 활용합니다. 또한 제시문에 주어진 $Q(x)=(P(x))^2-P'(x)$라는 식을 이용해야 하는데 중간값 정리를 활용하기 위해서는 $Q(x)$의 부호가 바뀌는 값들을 찾아야 합니다. 이 때 $P(x)=0$으로 만들면 $P'(x)$만으로 $Q(x)$의 부호가 결정됩니다. $P(x)$의 근을 구해 대입하면 $Q(x)$의 부호가 $P'(x)$를 따라서 바뀝니다. $P(x)$와 $P'(x)$의 그래프를 같은 좌표축에 그려놓고 비교해보면 좀 더 수월하게 문제를 풀 수 있습니다.

2-2) 식의 형태를 보면 좌변의 $P'(x)$ 두 개가 하나는 미분($P''(x)$), 다른 하나는 적분($P(x)$)이 된 형태로 생각할 수 있습니다. 이런 형태가 나오는 식은 $f(x)g(x)$의 미분, $\frac{f(x)}{g(x)}$의 미분, 부분적분 등이 있는데 여기서 $(P'(x))^2>P(x)P''(x)\Rightarrow P(x)\cdot P''(x)-(P'(x))^2<0$형태로 바꾸면 분수함수 미분의 분자와 유사한 형태임을 파악할 수 있습니다. 또한 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$를 x에 대해 미분하면 $f'(x)=(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)$가 돼 다음과 같은 식을 만족합니다.

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}$$

이는 중요한 식이므로 형태를 익혀두는 것이 좋습니다.

2-3) 2-2)를 이용해 쉽게 풀 수 있는 문제입니다. 논술에서는 이처럼 문제들끼리 연결되는 경우가 대부분이므로 항상 앞뒤 문제와의 연결고리를 생각하면서 문제를 풀어야 합니다.

2-4) 2-1)에서 m이 홀수이면 $Q(x)$가 $m+1$개 이상의 실근을 갖고, m이 짝수이면 $Q(x)$가 m개 이

상의 실근을 갖는 것을 증명했습니다. m이 홀수일 때 $Q(x)$가 $m+2$개 이상의 실근을 가질 수 없고 m이 짝수일 때 $Q(x)$가 $m+1$개 이상의 실근을 가질 수 없다는 것만 증명하면 됩니다. 이 문제도 역시 2-3)에서 연결되는 문제인데 2-3)의 부등식을 이용해 증명합니다. $P(x)Q'(x)>2P'(x)Q(x)$에서 x에 $Q(x)$의 근을 대입하면 우변은 0이 되기 때문에 x가 $Q(x)$의 근일 때 $P(x)Q'(x)$는 부호가 같아야 합니다. 이 때 인접한 두 근은 $Q'(x)$의 부호가 달라야 하므로 $P(x)$의 부호도 달라집니다. 이 성질을 이용해 귀류법에서 모순을 찾습니다.

예시답안 1-1) 임의의 실수 a에 대해 다음을 만족한다.

$$f(a)=b\text{이면 } f(f(a))=a\Rightarrow f(b)=a$$

i) $a>b$인 경우 : $f(a)-a=b-a<0$, $f(b)-b=a-b>0$이므로 중간값 정리에 의해 $f(x)-x=0$을 만족하는 $x_0\in[b, a]$가 존재한다. *ii)* $a=b$인 경우 : $f(a)=b\Rightarrow f(a)=a$이므로 $x_0=a$이다. *iii)* $a<b$인 경우 : $f(a)-a=b-a>0$, $f(b)-b=a-b<0$이므로 중간값 정리에 의해 $f(x)-x=0$을 만족하는 $x_0\in[a, b]$가 존재한다.

1-2) 최대·최소 정리에 의해 $f(x)-g(x)$는 최댓값과 최솟값을 갖는다. 만일 최댓값과 최솟값의 부호가 다르다면, 중간값 정리에 의해 $f(x)-g(x)=0$이 근을 갖고 $f(x)$와 $g(x)$가 하나 이상의 점에서 만난다. 만일 $f(x)-g(x)$의 최댓값과 최솟값이 부호가 같다면 일반성을 잃지 않고 부호가 +라 할 수 있다(부호가 -인 경우는 $g(x)-f(x)$가 +인 경우와 같은 방법으로 증명한다). 이때, $f(x)-g(x)$의 최솟값이 d라면 임의의 $x\in[0, 1]$에 대해 다음을 만족한다.

$$f(x)-g(x)\geq d>0\Rightarrow f(x)\geq g(x)+d$$

$f^2(x)=f(f(x))$와 같이 $f(x)$를 n번 합성한 함수를 $f^n(x)$로 표현한다. 이 때, $f^n(x)\geq g^n(x)+nd$을 수학적 귀납법으로 증명해보자.

$n=1$인 경우, $f(x)\geq g(x)+d$

$n=k$인 경우, 다음을 가정한다.

$f^k(x)\geq g^k(x)+kd$

$n=k+1$인 경우, 다음과 같다.

$$\begin{aligned}f^{k+1}(x)&=f(f^k(x))\\&\geq g(f^k(x))+d=f^k(g(x))+d\\&\geq g^k(g(x))+kd+d\\&=g^{k+1}(x)+(k+1)d\end{aligned}$$

따라서 임의의 자연수 n에 대해 $f^n(x)\geq g^n(x)+nd$가 성립한다.

이때, $f:[0, 1]\rightarrow[0, 1]$과 $g:[0, 1]\rightarrow[0, 1]$이므로 다음을 만족한다.

$$f^n:[0, 1]\rightarrow[0, 1],\ g^n:[0, 1]\rightarrow[0, 1]$$

$n=[\frac{1}{d}]+1$이면, $n>\frac{1}{d}$을 만족하므로 다음이 성립한다.

$$f^n(x)\geq g^n(x)+nd>g^n(x)+1>1$$

이는 $f^n:[0, 1]\rightarrow[0, 1]$에 모순이다. 따라서 $f(x)-g(x)$의 최댓값과 최솟값이 부호가 같을 수 없고, $f(x)$와 $g(x)$는 항상 하나 이상의 점에서 만난다.

2-1) $P(x)=a_m(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_m)$, $(\alpha_1>\alpha_2>\cdots>\alpha_m)$일때, $Q(x)=(P(x))^2-P'(x)$에 $\alpha_i(1\leq i\leq m)$을 대입하면 다음과 같다.

$$Q(\alpha_i)=-P'(\alpha_i)$$

또한 $P_i(x)=a_m(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{i-1})(x-\alpha_{i+1})\cdots(x-\alpha_m)$이면 다음과 같다.

$$P(x)=(x-\alpha_i)P_i(x)$$
$$P'(x)=P_i(x)+(x-\alpha_i)P'_i(x)$$
$$P'(\alpha_i)=P_i(\alpha_i)$$

즉, $Q(\alpha_i)=-P_i(\alpha_i)$가 되는데 $P_i(\alpha_i)$에서 $(\alpha_i-\alpha_1)\sim(\alpha_i-\alpha_{i-1})$까지 음수이므로 i가 짝수인 경우는 $Q(\alpha_i)$가 양수, i가 홀수인 경우는 $Q(\alpha_i)$가 음수가 된다. 따라서 중간값 정리에 의해 $Q(x)$는 $\alpha_{i+1}\leq$

$x \le \alpha_i (1 \le i \le m-1)$에서 실근을 갖는다. $Q(x)$는 $2m$차 다항식이므로 다음을 만족한다.

$$\lim_{x\to\infty} Q(x)=\infty,\ \lim_{x\to-\infty} Q(x)=\infty$$

$x>\alpha_1$, $x<\alpha_m$ 에서 $Q(x)>0$인 x가 존재.

m이 홀수이면 $Q(\alpha_1)<0$, $Q(\alpha_m)<0$이므로 $x>\alpha_1$, $x<\alpha_m$인 범위에서 2개의 실근을 추가로 갖는다. 따라서 총 $m+1$개 이상의 실근을 갖는다. m이 짝수이면 $Q(\alpha_1)<0$, $Q(\alpha_m)\ge 0$이므로 $x>\alpha_1$인 범위에서 1개의 실근을 추가로 가지게 돼 총 m개 이상의 실근을 갖는다.

2-2) $(P'(x))^2>P(x)P''(x) \Leftrightarrow P(x)P''(x)-(P'(x))^2<0$에서 $P(x)P''(x)-(P'(x))^2$는 $\frac{P'(x)}{P(x)}$를 미분했을 때 분자에 해당된다. 즉, 다음과 같다.

$$P(x)P''(x)-(P'(x))^2=(P(x))^2\left(\frac{P'(x)}{P(x)}\right)'$$

a) $x=\alpha_i$인 경우, $P(x)=0$이고 $(P'(x))^2>0$이므로 성립한다. b) $x\ne\alpha_i$인 경우, $\frac{P'(x)}{P(x)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-\alpha_i}$ 이므로 양변을 미분하면 다음과 같다.

$$\left(\frac{P'(x)}{P(x)}\right)'=-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(x-\alpha_i)^2}$$

$(P(x))^2>0$, $\left(\frac{P'(x)}{P(x)}\right)'=-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(x-\alpha_i)^2}<0$이므로 $P(x)P''(x)-(P'(x))^2<0$ 이 돼 성립한다.

2-3) $Q(x)=(P(x))^2-P'(x)$, $Q'(x)=2P(x)P'(x)-P''(x)$이므로 문제에서 주어진 식에 대입하면 다음과 같다.

$$P(x)(2P(x)P'(x)-P''(x))>2P'(x)((P(x))^2-P'(x))$$

양변에서 $2(P(x))^2P'(x)$를 빼면 다음과 같다.

$$-P(x)P''(x)>-2(P'(x))^2$$

2-2)에서 $(P'(x))^2>P(x)P''(x) \Leftrightarrow -P(x)P''(x)>-(P'(x))^2>-2(P'(x))^2$이므로 성립한다.

2-4) 2-1)에서 m이 홀수면 $x<\alpha_m$, $\alpha_m<x<\alpha_{m-1}$, $\cdots \alpha_2<x<\alpha_1$, $x>\alpha_1$으로 나눠지는 $m+1$개의 구간에서 적어도 한 개 이상의 실근을 갖는다는 것을 증명했다. 이 $m+1$개의 구간 중에서 실근이 2개 이상인 구간이 존재한다고 가정하고 그 구간을 T, 2개 이상의 실근 중 인접한 두 근을 w_1, w_2라 하자. 2-3)의 부등식에 w_1, w_2를 대입하면 $Q(w_1)=0$, $Q(w_2)=0$이므로 $P(w_1)Q'(w_1)>0$, $P(w_2)Q'(w_2)>0$인데 구간T에서는 $P(x)$의 부호가 일정하므로 $Q'(w_1)$과 $Q'(w_2)$의 부호가 같아야 한다. 그런데 인접한 두 실근에서의 미분계수는 서로 반대여야 하므로 모순이다.

따라서 $m+1$개의 모든 구간에서 실근의 개수는 정확히 1개이고 m이 홀수이면 $Q(x)$가 정확히 $m+1$개의 서로 다른 실근을 갖는다. 마찬가지로 2-1)에서 이 m짝수이면 $\alpha_m<x<\alpha_{m-1}$, $\cdots\alpha_2<x<\alpha_1$, $x>\alpha_1$으로 나눠지는 m개의 구간에서 적어도 한 개 이상의 실근을 가진다는 것을 증명했다. 만일 실근의 개수가 m개가 아니라면 $\lim_{x\to\infty}Q(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}Q(x)=\infty$이고 중근이 없으므로 실근의 개수는 짝수이다. 따라서 적어도 $m+2$개 이상의 실근이 존재해야 한다. 실근의 개수가 $m+2$개 이상이라면 $x<\alpha_m$, $\alpha_m<x<\alpha_{m-1}$, $\cdots\alpha_2<x<\alpha_1$, $x>\alpha_1$로 나눠지는 m+1개의 구간 중 실근의 개수가 2개 이상인 구간이 존재한다. 위의 m이 홀수인 경우와 마찬가지 방법으로 모순이 나온다. 그러므로 m이 짝수인 경우에는 $Q(x)$가 정확히 m개의 서로 다른 실근을 갖는다.

Tip : **중간값 정리(Intermediate value theorem)의 역사**

보헤미아(지금의 체코)의 철학자인 볼차노(Bernhard Bolzano)는 성직자이자 프라하대학의 교수였는데, 수학에도 관심이 많았습니다. 특히 그가 1817년에 발표한 논문인 '순수 해석 증명(Rein analytischer Beweis)'에는 중간값 정리에 대한 설명이 최초로 등장합니다. 그가 제시한 명제는 다음과 같습니다.

x에 대한 두 연속함수 $f(x)$와 $\phi(x)$가 $x=\alpha$일 때 $f(\alpha)<\phi(\alpha)$이고 $x=\beta$일 때 $f(\beta)>\phi(\beta)$이면 α와 β사이에는 $f(x)=\phi(x)$을 만족하는 x가 항상 존재한다.

동일한 수학적 결과가 1821년 발표된 코시(Cauchy)의 '분석 과정(cours d'Analyse)'에도 등장하지만 코시의 업적으로 인정받고 있지는 못합니다. 볼차노가 제시한 중간값 정리에 대한 증명도 당시에는 인정받았지만 현재는 정확하지 않다고 여겨지고 있습니다.